39 三平方の定理と空間図形

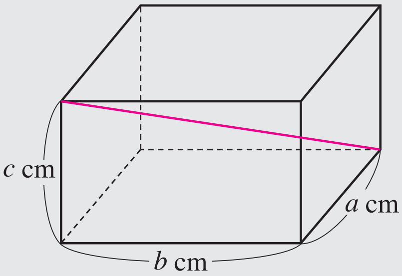
レッスン 7009 直方体の対角線の長さ

ポイント

● 縦，横，高さがそれぞれ a cm，b cm，c cm の直方体の対角線の長さは

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \text{cm}$$

である。



計算のしくみ

右の図のように底面の対角線をひき，その長さを x cm とすると

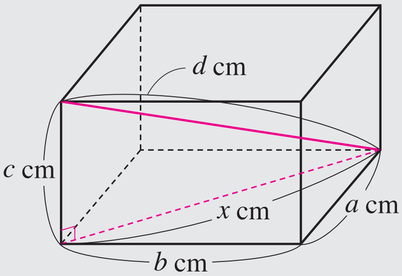
$$x^2=a^2+b^2$$

よって，直方体の対角線の長さを d cm とすると

$$d^2=x^2+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2$$

$d>0$ なので

$$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

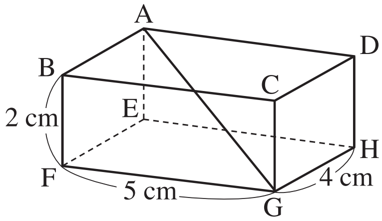


問題

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

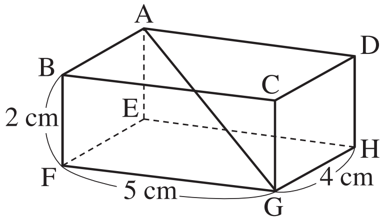
(2) 1 辺の長さが 3 cm の立方体の対角線の長さを求めなさい。



解答

(1) 直方体の縦，横，高さはそれぞれ $4\,\text{cm}$，$5\,\text{cm}$，$2\,\text{cm}$ だから，求める対角線 AG の長さは

$$\sqrt{4^2+5^2+2^2}=\sqrt{45}$$
$$=\mathbf{3\sqrt{5}\ (cm)}\quad \cdots(答)$$



(2) 立方体のすべての辺の長さは $3\,\text{cm}$ だから，求める対角線の長さは

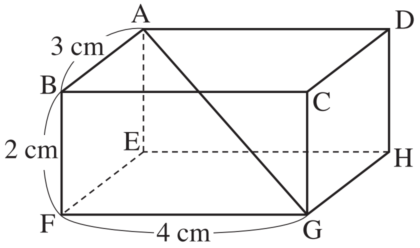
$$\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}$$
$$=\mathbf{3\sqrt{3}\ (cm)}\quad \cdots(答)$$

確認テスト　直方体の対角線の長さ

次の問いに答えなさい。

(1) 右の図の直方体の対角線 AG の長さを求めなさい。

(2) 1 辺の長さが $2\,\text{cm}$ の立方体の対角線の長さを求めなさい。



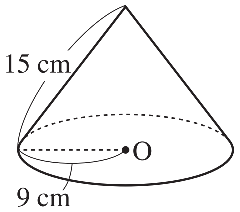
レッスン 7010 円錐の高さと体積

問題

右の図のように，底面の半径が $9\,\text{cm}$，母線の長さが $15\,\text{cm}$ の円錐がある。このとき，次の問いに答えなさい。

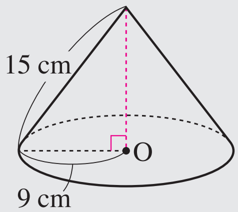
(1) 円錐の高さを求めなさい。

(2) 円錐の体積を求めなさい。



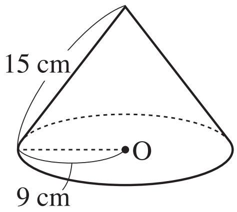
ポイント

● 母線の長さと底面の半径が与えられた円錐の高さ
円錐の頂点をA，底面の円周上のある1点をBとすると，
△ABOは直角三角形となるから，三平方の定理を使える



解答

(1) 底面の半径，高さ，母線によって囲まれた三角形は直角三角形だから，高さを h cmとすると



$$9^2 + h^2 = 15^2$$
$$h^2 = 225 - 81$$
$$h^2 = 144$$

$h > 0$ なので

$$h = 12$$

よって

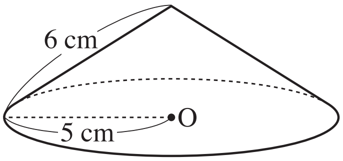
12 cm …(答)

(2) (1)より，円錐の高さは12 cmなので，求める体積は

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 9^2 \times 12 = \mathbf{324\pi\ (cm^3)}$$ …(答)

確認テスト 円錐の高さと体積

右の図のように，底面の半径が5 cm，母線の長さが6 cmの円錐がある。このとき，次の問いに答えなさい。



(1) 円錐の高さを求めなさい。

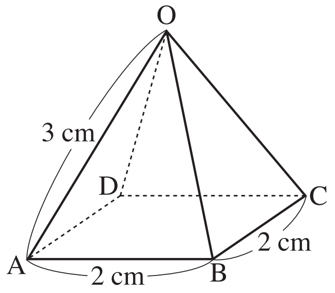
(2) 円錐の体積を求めなさい。

レッスン 7011

角錐の高さと体積

問題

右の図のような正四角錐 O-ABCD について，次の問いに答えなさい。



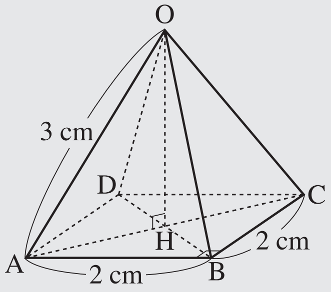
(1) 正四角錐の高さを求めなさい。

(2) 正四角錐の体積を求めなさい。

ポイント

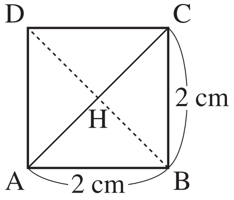
● 各辺の長さが与えられた正四角錐の高さ

正四角錐の高さを OH とすると，点 H は底面の正方形の対角線の交点である。$\angle OHA = 90°$ だから，直角三角形 OHA に注目して，三平方の定理を利用して求める



解答

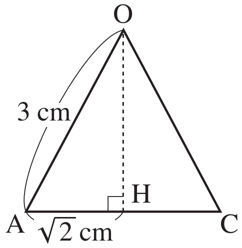
⑴ 点 A と C を結ぶ。△ABC は ∠ABC ＝ 90° の直角二等辺三角形だから



$$AC : AB = \sqrt{2} : 1$$
$$AC : 2 = \sqrt{2} : 1$$
$$AC = 2\sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$

よって

$$AH = \frac{1}{2}AC$$
$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\ (\mathrm{cm})$$



したがって，直角三角形 OAH に着目すると

$$OH^2 + (\sqrt{2})^2 = 3^2$$
$$OH^2 = 9 - 2$$
$$OH^2 = 7$$

OH ＞ 0 だから

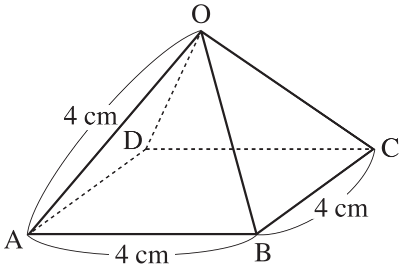
$$OH = \sqrt{\mathbf{7}}\ \mathbf{cm}$$ …(答)

⑵ ⑴より，正四角錐の高さは $\sqrt{7}$ cm なので，求める体積は

$$\frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{7} = \frac{\mathbf{4\sqrt{7}}}{\mathbf{3}}\ (\mathbf{cm^3})$$ …(答)

確認テスト　角錐の高さと体積

右の図のような正四角錐 O-ABCD について，次の問いに答えなさい。



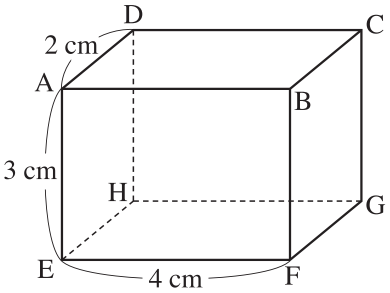
⑴ 正四角錐の高さを求めなさい。

⑵ 正四角錐の体積を求めなさい。

レッスン
7012
角柱・円柱とひもの長さ

問題

右の図の直方体において，直方体の表面を通って，頂点Aから頂点Gまで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次のそれぞれの場合について，ひもの長さを求めなさい。

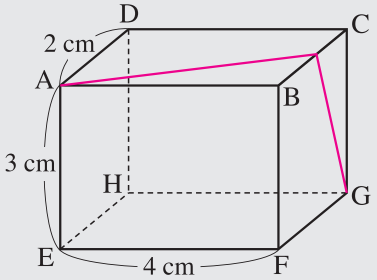


(1) ひもが辺BCを通るようにかけるとき

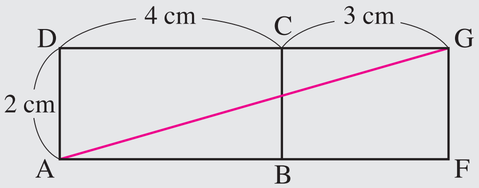
(2) ひもが辺EFを通るようにかけるとき

ポイント

● ひもをゆるまないようにかける
→ ひもの長さは最小になるので，展開図をかいてその長さを求める

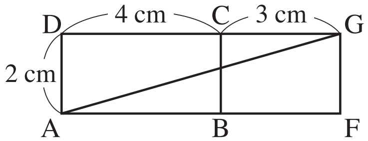


→



解答

(1)



求めるひもの長さは，上の展開図の
長方形AFGDの対角線AGの長さだから

$$AG^2 = 2^2 + (4+3)^2$$
$$= 4 + 49$$
$$= 53$$

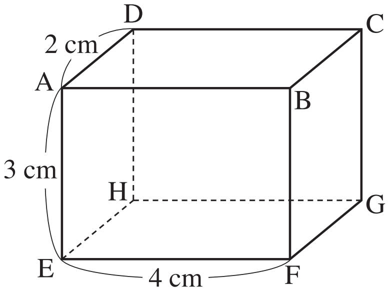
$AG > 0$ なので

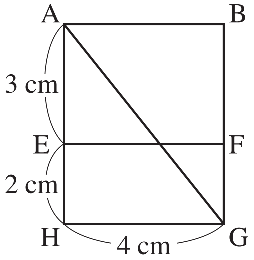
$$AG = \sqrt{53}\ \text{(cm)}$$

よって，ひもの長さは

$\sqrt{53}$ **cm** …(答)

(1)



(2) 

求めるひもの長さは，上の展開図の
長方形 AHGB の対角線 AG の長さだから

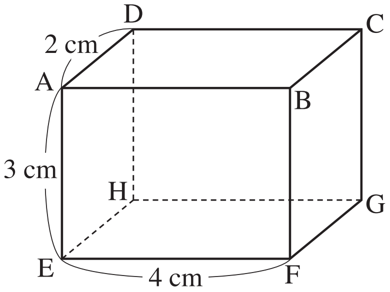
$$AG^2 = (3+2)^2 + 4^2$$
$$= 25 + 16$$
$$= 41$$

$AG > 0$ なので

$$AG = \sqrt{41}\ (\text{cm})$$

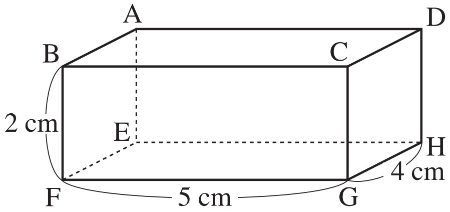
よって，ひもの長さは

$\boldsymbol{\sqrt{41}}$ **cm** …(答)

(2) 

確認テスト　角柱・円柱とひもの長さ

右の図の直方体において，直方体の表面を通って，頂点 A から頂点 G まで，ひもをゆるまないようにかける。このとき，次のそれぞれの場合について，ひもの長さを求めなさい。



(1) ひもが辺 BC を通るようにかけるとき

(2) ひもが辺 BF を通るようにかけるとき